Questions populaires à propos de l'apprentissage des concepts et processus mathématiques en 3e secondaire

Généralités

Q- Dans la présentation des concepts et processus, il y a parfois des puces et des « sous-puces ». Pourriez-vous préciser le rôle de ces dernières ?

R- Comme dans le cas du premier cycle du secondaire, les « sous-puces » sont là pour apporter des précisions sur les incontournables pour atteindre les visées du chapeau principal (boulet supérieur). Ces précisions peuvent être de l'ordre de l'exemple ou d'une limite.

Q- Pouvons-nous faire des rapprochements entre les séquences et les trois programmes qui existaient auparavant: 4e secondaire (416, 426, 436) et 5e secondaire : (514, 526, 536)?

R- Le nouveau programme vise le développement de compétences. Des situations dans l'esprit de chacune des compétences n'existaient pas dans le matériel lié aux programmes précédents. Toutefois, des compétences ne se développent pas à vide. L'élève a besoin de connaissances mathématiques pour se représenter une situation, l'analyser de manière à suggérer des solutions à un problème soulevé, de manière à émettre ou à valider des conjectures, à interpréter, réguler et produire des messages. Dans le contenu de formation (connaissances mathématiques nécessaires) du Programme de formation, il y a certes des connaissances à acquérir qui sont communes aux anciens programmes (les précédents mais aussi les plus anciens 064). Des mathématiques restent des mathématiques. Si l'on cherche à faire un rapprochement avec les connaissances visée dans CST, on trouvera certaines correspondances avec les programmes 068-416 et 068-514, SN requiert des connaissances similaires à celles des programmes 068-436 et 068-536. Quant à TS, il y a peu de correspondance à faire avec le 068-426 et le 068-526. Le cours de 4e secondaire de cette séquence regroupe certaines connaissances du 068-416, du 068-436 et du 068-536 (ou 068-526). Certains contenus de 5e secondaire se rapprochent de ceux du 068-526 ou du 068-536. Dans CST et TS, il y a de nouvelles connaissances visée qui n'apparaissaient dans aucun des programmes précédents. Par exemple, les procédures de choix sociaux dans CST et les matrices dans TS. On ne peut pas faire de rapprochement cependant quant à la portée post-secondaire des séquences avec les anciens programmes. TS par exemple, ouvrira la porte à quelque 40 techniques de plus que le 068-426. CST sera également requise pour plusieurs programmes, SN n'est plus perçue comme l'unique voie royale comme l'était auparavant le parcours 068-436 suivi de 068-536. Il faut donc être prudent avec les comparaisons.

Compétences

Q- Les situations-problèmes pour la compétence 1- Résoudre une situation-problème présentent souvent plusieurs contraintes. Ces contraintes doivent-elles être très nombreuses ? Ne s'éloigne-t-on pas du réel en les multipliant ?

R- Il n'existe pas nécessairement d'adéquation entre le nombre de contraintes et le niveau de complexité d'une situation-problème. Qu'elle soit une situation-problème, une situation d'application ou une situation de communication, une tâche complexe d'une ou deux périodes est souvent suffisante pour atteindre le but principal de la compétence, le savoir-agir en contexte. Pour la situation-problème, le savoir-agir vise principalement la capacité à faire face à la nouveauté et à créer une solution pour un ou plusieurs aspects d'une problématique soulevée. La situation cependant doit rester mathématique en ce sens qu'il doit s'avérer indispensable de mobiliser des concepts et des processus mathématiques pour analyser la situation et proposer des solutions à la dite problématique soulevée.

Au moment de l'évaluation, il ne faut pas oublier qu'une épreuve est là pour aider l'enseignant à compléter son jugement. En plus de situations-problèmes, il faut également avoir des tâches complexes de compétence 2 dans laquelle l'élève est amené à dégager d'une situation (en contexte), une ou des conjectures (d'abord intuitivement à la suite de ses observations) qu'il tentera ensuite de prouver à l'aide d'un raisonnement rigoureux présentant un enchaînement de faits ou d'arguments (mathématiques et contextuels) qui ne laisse pas de place au doute sur la valeur de vérité de celles-ci. Il faut aussi des tâches de communication complexes, où l'élève est amené à s'approprier de l'information présentée dans divers registres, à cerner les concepts mathématiques qu'ils véhiculent, à présenter l'information sous d'autres formes, à l'organiser de manière compréhensible, afin de rendre un message clair et sans ambiguïté (réguler) dans un langage compréhensible et adapté pour l'interlocuteur donné.

Q- Dans les explications sur la compétence 1, on parle de registres de représentation. Qu'est-ce que c'est exactement ?

R- À l'annexe D du programme du 2e cycle, on indique l'ensemble des registres de représentation à la disposition de l'élève pour illustrer les concepts mathématiques à l'étude dans les différents champs de la mathématique.

Q- L'élève doit-il toujours utiliser un ou des registres de représentation lorsqu'il se représente la situation-problème?

R- Forcément (par exemple, au plus simple, « 3,25 » est une représentation d'une quantité : cette écriture du nombre appartient au registre symbolique).

Q- C*omment fait-on pour évaluer les registres de représentation dans une situation d'apprentissage et d'évaluation (SAE)?*

R- Lorsque le passage du registre verbal au registre symbolique ou graphique est requis dans une SAE, il est possible de voir si ces registres sont utilisés selon le respect des règles et des conventions qui leur sont propres, si l'information qu'on y trouve est conforme à celle émise ou à émettre, si les manipulations effectuées à l'intérieur du registre sont adéquates (p. ex. : les manipulations algébriques doivent obéir à des règles respectant la relation d'égalité), etc.

Q- Qu'est-ce exactement qu'un modèle mathématique? Peut-on avoir des exemples ?

R- Tel qu'il est défini dans le Programme de mathématique (voir la note de bas de page dans la rubrique relations entre la mathématique et les autres éléments du Programme de formation), un modèle est une « représentation » concrète, « conceptuelle » ou « opérationnelle » d'un fragment ou d'un aspect de la réalité. En d'autres mots : « représentation » inclut schémas, dessins, modes de représentation, « conceptuelle » s'apparente aux concepts mathématiques et « opérationnelle », aux processus.

L'élève choisit le modèle en relation avec les champs de la mathématique : un modèle algébrique, géométrique, probabiliste ou statistique. Les proportions constituent un modèle, la représentation d'une relation entre des données à l'aide de tableaux, dessins ou diagrammes, la fonction polynomiale de degré *x*, une relation métrique, une formule d'aire, l'algorithme du calcul de la moyenne, le processus régissant l'étude statistique peuvent tous prendre la place d'un modèle, cela dépend de la situation.

Q- Pour la compétence disciplinaire 2, si l'on demande à un élève de démontrer la conjecture suivante : « Dans un prisme, la somme du nombre de sommets et du nombre de faces est supérieure de 2 au nombre d'arêtes* », *comment peut-on constater qu'un élève a « formulé une conjecture appropriée à la situation »?

R- L'action de conjecturer consiste à valider des conjectures (énoncés que l'on pense vrais) émises ou non par l'élève. On peut débuter par une conjecture déjà émise; c'est le cas ici. Il faut alors se demander si dans la preuve, l'élève devra émettre d'autres conjectures et s'appuyer sur elles pour étaler son raisonnement. Probablement. Cependant les traces seront-elles disponibles? Il faut habituer l'élève à laisser des traces de sa démarche.

Dans le processus de validation de cette conjecture : *Dans un prisme, la somme du nombre de sommets et du nombre de faces est supérieure de 2 au nombre d'arêtes*, supposons que l'élève s'appuie sur plusieurs exemples pour tirer sa conclusion. Il émettra la conjecture (énoncé, affirmation) voulant que cette relation est vraie pour tel prisme, vraie aussi pour l'autre, etc., donc vraie pour l'ensemble des prismes. Ces affirmations (conjectures) peuvent apparaître au fur et à mesure de la démarche ou être groupées dans la conclusion. Elles énoncent ainsi des conjectures adaptées à la situation.

Dans un autre cas, par exemple lorsque la conjecture de départ n'est pas complète: *il existe un type de solide pour lequel la somme du nombre de sommets et du nombre de faces est supérieure de 2 au nombre d'arêtes*, la conclusion (ou la démarche) devrait amener l'élève à reformuler une nouvelle conjecture en la précisant (identifier les solides en question), en l'expliquant (comment ça marche?), ou en la justifiant (pourquoi c'est vrai). Ici le type de solides pour lesquels la conjecture est vraie est à explorer. L'élève aura à énoncer les conditions (type de solides) qui font que la conjecture est vraie.

Dans sa démarche, l'élève peut aussi chercher à établir la relation entre le nombre de faces jointes et le nombre d'arêtes engendrées, entre le nombre de faces et le nombre de sommets. Il cherche des formules (conjectures) intermédiaires. Parfois il ne les formulera pas car il n'aboutira pas (il les a réfutées en chemin). Lorsqu'il cherche une relation intermédiaire, il conjecture sur son existence possible. La plupart des conjectures restent implicites. Il faut quand même réussir à en faire expliciter quelques-unes si on veut observer la pensée.

Prenons pour exemple une autre conjecture de départ, d'un autre niveau de complexité (le type de prisme et la relation cherchée ne sont pas donnés, le tout est à découvrir). Conjecture : « Il existe une relation entre le nombre de sommets, le nombre de faces et le nombre d'arêtes d'un solide. » L'élève doit explorer les types de solides, noter les données correspondant aux variables mentionnées, dégager les solides qui montrent une régularité dans les données, les regrouper et établir la relation et s'assurer par la suite qu'elle est valable pour tout prisme et reformuler la conjecture en tenant compte de ses découvertes, de façon à considérer tous les aspects de la situation. C'est impossible à établir pour la sphère, possible pour le prisme droit, il s'agit de la relation suivante : …pas possible pour le cône, la boule et le cylindre, etc.

Dans une preuve géométrique (démonstration plus formelle), chacun des pas de raisonnement, l'angle ABC vaut 30° car il est supplémentaire à $\angle$CBD, est une conjecture que l'élève formule pour chercher à en valider une autre plus englobante. Dans ce genre de preuve l'élève émet plusieurs conjectures qu'il organise de manière à prouver autre chose.

Q- . Qu'est-ce qu'on entend exactement par « justifier »?

R- L'élève doit dire ce qu'il fait et pourquoi il le fait, pourquoi il pense que ce qu'il fait ou émet est approprié. Par exemple : la mesure de l'angle cherché est de 30° car il est opposé à l'angle P qui mesure aussi 30° et que deux angles opposés par le sommet sont isométriques. Le forfait *X* est le plus avantageux car le client a besoin de parler moins de 100 minutes par mois et pour un temps d'utilisation de moins de 100 minutes, le coût total avec le forfait *X* est toujours inférieur au coût du forfait *Y*. Je vais utiliser la relation de Pythagore pour déterminer la mesure du segment AB car il s'agit d'un triangle rectangle. Etc.

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE

Doit-on utiliser et donc enseigner le registre symbolique de type en compréhension au même titre que la notation en intervalle et en extension? Dans le programme, à la page 125, il en est fait mention en exemple de « phrases qui contiennent uniquement des symboles mathématiques ».

Le programme de 3e secondaire comprend l'étude des ensembles de nombres (voir la note 1 au bas de la page 55 et les éléments de méthode au 1er paragraphe de la page 56).

Il serait approprié que l'élève puisse, minimalement, faire des liens entre les différents types d'écritures d'un sous-ensemble de nombres, c'est-à-dire d'un intervalle de nombres (ne pas confondre le concept d'intervalle de nombres, c'est-à-dire de sous-ensemble avec la notation en intervalles [entre crochets]). Un sous-ensemble de nombres (ou intervalle de nombres) peut se représenter de différentes façons. Par exemple, dans la représentation de l'ensemble-solution d'une inéquation, si l'on obtient $x > 6$ (compréhension), on pourrait représenter les solutions possibles, qui forment un sous-ensemble de nombres, également à l'aide de la notation en intervalles (entre crochet), de la notation en extension (énumération entre accolades) ou de la représentation graphique (droite numérique ou axe).

Il faut aussi sensibiliser l'élève à la nature de l'ensemble de nombres qu'implique l'ensemble-solution, selon le contexte. Les solutions possibles sont-elles constituées uniquement de nombres naturels, de nombres entiers, de nombres rationnels ou de nombres réels? Est-ce que la notation en intervalles pourrait permettre de représenter un intervalle de nombres naturels? Si oui, comment indiquer au lecteur l'ensemble de nombres ciblé par l'intervalle? En 3e secondaire, on peut noter à l'aide de mots ou de façon symbolique l'ensemble de nombres auquel se rapporte l'ensemble-solution. Le langage symbolique ne doit pas être intégré trop rapidement. Il faut d'abord s'assurer du sens à accorder aux concepts et à leurs représentations, et ce, en contexte si l'on veut que les symboles soient à leur tour porteurs de sens. Donc, on peut enseigner la notation en compréhension formelle (telle qu'elle est décrite dans l'annexe), sans négliger la compréhension du concept d'intervalle.

Il est également possible de s'intéresser à deux aspects. D'abord, on peut travailler l'union de deux sous-ensembles de nombres : à quel ensemble de nombres conduit l'union des nombres naturels positifs (température possible au-dessus du point de congélation de l'eau) et de leurs opposés (température possible au-dessous du point de congélation de l'eau). On peut travailler aussi l'intersection de deux sous-ensembles de nombres. Par exemple, quelles valeurs sont susceptibles de représenter le gain horaire que devrait cibler Marie dans sa recherche d'emploi si sa condition lui permet de travailler un maximum de 4 heures par semaine mais l'oblige à gagner un minimum de 20 $ par semaine?

De plus, il serait intéressant de faire remarquer à l'élève qu'une notation est privilégiée dans un contexte ou un autre. Par exemple, en statistique, on utilise parfois la notation en intervalles pour regrouper des données, on utilise la représentation graphique pour illustrer le domaine d'une fonction selon le contexte, on utilise la notation en extension pour représenter les résultats possibles d'une expérience aléatoire, etc.

Ces actions permettent toutes de développer le sens du nombre : la base des concepts et processus du champ de l'arithmétique, dont l'élève a besoin pour exercer ses compétences.

À propos de la notation scientifique, doit-on simplement montrer la notation et les contextes pertinents ou doit-on aussi montrer aux élèves les opérations sur les nombres en notation scientifique?

R- C'est dans des contextes qui habituellement utilisent cette notation que celle-ci doit prendre son sens dans l'enseignement. Lorsque l'élève analyse une situation afin d'apporter une solution à une problématique, de valider une conjecture ou de transmettre de l'information de qualité, il doit être en mesure de comprendre cette notation, de l'interpréter correctement, de lui attribuer mentalement un ordre de grandeur, de traduire des valeurs à l'aide de cette notation, et ce, dans le respect des normes et conventions propres à cette écriture. Comme il est suggéré dans les éléments de méthode : la notation scientifique facilite la lecture et l'écriture de petits et de grands nombres, elle favorise l'appropriation de préfixes tels que nano, micro, méga ou giga, et permet, le cas échéant, d'indiquer le nombre de chiffres significatifs d'un nombre donné.

Didactiquement, si on veut que l'élève donne du sens à la notation scientifique, qu'il lui associe un ordre de grandeur lorsqu'il interprète, calcule ou déduit une quantité, des manipulations à l'aide de cette notation peuvent possiblement aider à atteindre le but! Ces exercices sont présentés comme des moyens d'atteindre les buts fixés.

En 3e secondaire, doit-on étudier la technique relative à la transformation d'un nombre périodique en nombre rationnel? Cet objet n'est pas ciblé de façon spécifique dans le programme.

En effet, cette technique ne représente pas une finalité en soi, mais elle constitue un moyen utile pour développer le sens du nombre chez l'élève. Une même quantité peut s'écrire de différentes façons (notation décimale ou fractionnaire) et les techniques touchant les passages entre ces différents types d'écritures peuvent renforcer la compréhension de l'ordre de grandeur d'un nombre et permettre de s'en donner une image mentale.

Cependant, nous n'encourageons pas le passage systématique de la notation fractionnaire à la notation décimale pour se représenter les nombres ou les manipuler (une façon de faire courante dans les anciens programmes qui permettait de se débarrasser en quelques sortes des fractions). Vous trouverez d'ailleurs une note en ce sens dans le programme, à la page 55, au bas du tableau ayant trait aux concepts et processus :

« Les coefficients et les termes constants des expressions algébriques s'écrivent en notation décimale ou fractionnaire. Par exemple, il n'est pas indiqué de transformer en notation décimale les nombres ayant un développement décimal périodique, ni les nombres avec lesquels il est plus facile de travailler en notation fractionnaire. De même, le radical est conservé s'il n'est pas pertinent de le transformer. »

On veut que l'élève soit en mesure de se représenter une quantité et de la manipuler sous sa forme fractionnaire également. Il peut parfois s'avérer plus pertinent, pour mieux comprendre, de représenter une quantité exprimée initialement sous la forme d'un nombre décimal périodique sous une forme fractionnaire.

De plus, il est important de saisir l'équivalence des deux notations lorsqu'on fait usage de la calculatrice (affichage décimal) dans une situation comportant des données en notation fractionnaire et qu'il convient, par respect du contexte, d'utiliser également cette forme dans la réponse.

Dans l'évaluation des compétences, il ne s'agit pas de vérifier si l'élève maîtrise les techniques relatives aux passages entre les différentes notations (il pourrait traiter les nombres dans une forme comme dans une autre), mais bien de vérifier s'il est en mesure d'exercer ses compétences quelle que soit la forme d'écriture présentée dans la situation, si le sens du nombre est intégré dans ce qu'il fait. L'élève pourra, à sa guise, changer ou non de notation dans le traitement de la situation, mais il devra dans ses conclusions ou ses résultats écrire les nombres en utilisant la notation qui convient le mieux au contexte.

Les différents types de matériels pédagogiques offrent divers moyens de parvenir aux fins souhaitées. On doit toutefois rester vigilant afin que ces moyens ne deviennent pas des fins.

Le Programme dit : Calcul en contexte avec des exposants entiers (base rationnelle) et des exposants fractionnaires. Jusqu'où va-t-on? Doit-on travailler avec des exposants fractionnaires autres que 1/2 et 1/3 qui sont indiqués dans la note? Doit-on aussi montrer aux élèves à réduire les bases?

R- Le Programme précise la fin poursuivie : rendre l'élève capable de manipuler des expressions contenant des exposants fractionnaires dans les situations de compétences qu'il rencontrera, de faire des liens avec l'écriture à l'aide de radicaux principalement (mais pas exclusivement) pour les exposants 1/2 et 1/3 puisqu'il est possible de les lier à des contextes géométriques; 1/2 et 1/3 sont des incontournables.

Bien que parfois suggérés, les moyens d'atteindre ces fins, de développer le sens du nombre et des expressions qui lui sont liées, sont laissés à la discrétion des enseignants, comme il en a toujours été. Le Programme suggère des méthodes et parfois des moyens permettant d'atteindre les finalités ciblées, pas les exercices. Pour développer le sens du nombre, plusieurs manipulations sur ceux-ci sont possibles; on peut choisir celles suggérées dans le matériel didactique et les manuels ou en créer soi-même.

Est-ce que l'élève doit connaître (et comprendre) les lois des radicaux ou seulement montrer que l'exposant fractionnaire correspond à un radical? Si l'on s'en tient au lien entre l'exposant fractionnaire et le radical,

est-ce que l'on traite uniquement les exposants de type 1/n?

En 3e secondaire, l'élève s'approprie les lois des exposants. Il apprend à faire des liens entre deux notations différentes (la notation exponentielle et les radicaux) pour représenter une même valeur : l'approche de l'équivalence d'écriture et de sens ($9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$, $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$). Avec ces deux notations, l'élève effectue des calculs en contexte. Par exemple, dans un contexte où la régularité observée se traduit par une suite géométrique, il devient possible de déterminer la valeur de $8^{1/3}$ et de faire comprendre que cela revient à déterminer la racine cubique de 8 (chercher le nombre qui, figurant trois fois comme facteur d'une multiplication, conduit à un produit de 8), déterminer la valeur de $8^{1/2}$, revient à déterminer la racine carrée de 8 et, ainsi, que $8^{3/2}$ revient à $8^{1 + ½}$, c'est-à-dire 8^1 x $8^{½}$ (loi des exposants) ou 8 x la racine carrée de 8 (grâce à l'équivalence d'écriture), etc. Les exposants (1/2 et 1/3) peuvent également être mis en relation avec la racine carrée et la racine cubique lors de la recherche de mesures manquantes en géométrie (figure à deux ou trois dimensions).

En ce qui concerne la suite de l'apprentissage de la notation exponentielle et radicale en 4e et en 5e secondaire, on trouve, dans la séquence *Technico-sciences*, dès la 4e secondaire, les concepts d'exposant, de logarithme et de radical (racine ne) de mêmes que les liens qui les unissent. Les lois ne sont pas introduites de façon officielle, mais on peut lire, à la page 87, « Écriture d'un nombre à l'aide de radicaux ou d'exposants rationnels » parmi les processus, sous « Manipulation d'expressions numériques et algébriques ». On peut lire également, à la page 89, sous « Éléments de méthode » : « L'élève donne du sens aux manipulations de nombres écrits sous forme exponentielle ou radicale en exploitant les propriétés des exposants. Grâce à la connaissance des liens entre les différentes formes d'écriture, il passe de l'une à l'autre lorsqu'il exerce l'ensemble de ses compétences. ». Dans cette séquence le recours à l'équivalence d'écriture, introduit en 3e secondaire s'avère pertinent dans certaines situations, notamment dans la résolution d'équations et d'inéquations exponentielles et du deuxième degré ou dans la recherche de mesures impliquant des figures équivalentes (aires et volumes, optimisation). Des opérations faisant intervenir des radicaux peuvent également être nécessaires, selon le contexte. C'est en tenant compte des les lois des exposants que l'élève effectuera ces opérations.

En 4e secondaire, dans la séquence *Sciences naturelles*, le recours à l'équivalence d'écriture introduit en 3e secondaire, s'avère pertinent dans la résolution d'équations et d'inéquations du deuxième degré. C'est en 5e secondaire que les lois portant sur les exposants, les logarithmes et les radicaux sont intégrées (voir le programme). Dans les notes figurant au bas du tableau traitant des concepts de l'arithmétique, on trouve toute l'information nécessaire concernant les principales propriétés des radicaux qui sont ciblées.

Dans la séquence *Culture, société et technique*, le recours à l'équivalence d'écriture, introduit en 3e secondaire, n'a pas de prolongement comme tel. Il est cependant réinvesti dans les situations lorsque cela est pertinent.

I have a quick question I am hoping you can answer. In Cycle 2 (Year 1), students study systems of equations. When solving the systems algebraically, they are only responsible for using the comparison method whereby the equations are of the form y = ax + b. My question to you is whether the students should expect the rules to already be in this form, or might they be required to first algebraically manipulate the rule into such form?

En 3e secondaire, la résolution de systèmes d'équations s'inscrit dans le contexte de l'apprentissage des concepts de fonction, de relation et de réciproque, c'est-à-dire de dépendance entre les variables à l'étude. Donc, les équations que l'élève a à manipuler sont de la forme « fonctionnelle », soit f(x) = ax + b, ce qui conduit directement à la méthode de comparaison lorsqu'on doit résoudre un système de manière algébrique. C'est en 4e secondaire qu'on présente à l'élève des contextes se traduisant par d'autres formes d'équations de la droite et dans lesquels l'élève sera amené à apprendre d'autres méthodes ainsi qu'à manipuler les expressions en utilisant la méthode de son choix.

Dans le programme Mathématique 314, on trouvait la précision suivante : « Il est recommandé de ne pas utiliser la notation fonctionnelle; en outre, il est important que l'élève observe et explore des situations sans se laisser distraire par un symbolisme trop complexe. ». Cette directive est-elle maintenue pour la 1re année du 2e cycle ? Doit-on introduire le symbolisme f(x) dès la 1re année du cycle ?

Cette directive est toujours valable. Cependant, nous introduisons le symbolisme durant l'année et non au début de l'année suivante. Il s'agit de faire une introduction graduelle sans nuire aux apprentissages à réaliser. On pourrait reformuler cette directive comme suit : « Il est recommandé de ne pas utiliser la notation fonctionnelle *trop tôt dans les apprentissages, car* il est important que l'élève observe et explore des situations *dans un premier temps* sans se laisser distraire par un symbolisme trop complexe. »

Dans le présent programme, le symbolisme est introduit pour dégager les règles des fonctions au cours de l'année. Les deux formes d'écriture possibles sont intégrées dans le traitement des situations, soit y = ax + b et f(x)= ax + b ainsi que f(x) = k/x (ou y = k/x) et k = yx .

Devons-nous définir des termes comme domaine, image, croissance, décroissance et extrémum? Quand faut-il introduire dans le cycle la définition formelle de la fonction et le vocabulaire qui s'y rattache?

L'introduction ou la définition de termes mathématiques se rattachant à l'étude des fonctions se fait en contexte.

En 3^e^ secondaire, l'élève doit pouvoir comprendre et distinguer les concepts de relation, de fonction et de réciproque de manière à gérer efficacement les situations offertes dans le développement de ses compétences. Il est possible de rendre certaines définitions univoques à des fins de compréhension sans toutefois recourir à un symbolisme exagéré ni à des mots d'une grande complexité.

Dans le tableau portant sur les concepts et les processus qu'on trouve à la page 55, on peut lire ceci :
« Processus (…) Description des propriétés d'une fonction en contexte. »
« Note : (…) L'élève est initié à la description des propriétés d'une fonction : domaine, image, croissance, décroissance, extrémums, signe et coordonnées à l'origine. <u>Il les dégage de façon non formelle, et ce, toujours en relation avec le contexte.</u>»

Est-ce que le ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport tient à ce qu'un élève de 3^e^ secondaire utilise et comprenne la notation fonctionnelle? Par exemple, f(3) = 8 signifie que le point (3,8) est un couple solution, f(0) = 4 veut dire que l'ordonnée à l'origine (en contexte) est 4, f(x) = 0 veut dire trouver le zéro de la fonction (en contexte bien sûr) et f(x) = 0 pour x = 5 veut dire que le couple (5,0) est une solution. Ou est-ce que y = 3x + 4 et f(x) = 3x + 4 sont deux façons équivalentes de présenter la règle? De plus, doit-on aborder le symbolisme lié aux ensembles de départ et d'arrivée, par exemple : f : R --> R ?

Le genre de symbolisme que vous proposez ne fait pas l'objet d'un apprentissage spécifique en 3^e^ secondaire. Il est introduit lorsque cela s'avère pertinent seulement. L'intention première concernant l'apprentissage des concepts de relation, de fonction et de réciproque est leur compréhension. Il s'agit d'abord de donner du sens à ces concepts mathématiques. Une introduction trop rapide du symbolisme risque de nous éloigner de cette intention première.

Comme l'apprentissage des propriétés des fonctions doit demeurer en contexte, il n'est pas nécessaire de recourir à certaines de vos suggestions.

Dans le développement de ses compétences, l'élève doit distinguer les concepts de relation, de fonction et de réciproque. Le concept de réciproque peut, entre autres, être mis à contribution pour distinguer les concepts de relation et de fonction. Pour illustrer ces distinctions, on recourt à des contextes pertinents qu'il est possible de présenter de différentes façons. Il est donc possible de parler d'ensembles de départ et d'arrivée, mais s'assurant de demeurer lié au contexte. Parmi l'ensemble des relations et des fonctions qu'on met à la disposition de l'élève pour qu'il puisse faire l'apprentissage de ces concepts (fonction, relation, réciproque) et les distinguer, deux types de fonctions sont étudiés de façon plus approfondie, soit la fonction polynomiale de degré 0 ou 1 et la fonction rationnelle.

Par ailleurs, en plus de l'expression des règles associées aux fonctions à l'étude et puisque la relation d'inégalité et le système d'équation sont au programme, il pourrait être pertinent de se questionner sur l'ensemble des valeurs que prend une fonction (f(x) = ?) quand la variable indépendante se situe entre telle et telle valeur (pour x > 8 ou pour 3 ≤ x ≥ 25) et de noter les solutions de différentes façons (sur une droite numérique, en intervalles, etc.). On pourrait également s'intéresser aux valeurs du domaine (de la variable associée au contexte) pour obtenir une image (une ou des valeurs pour la variable du contexte) supérieure, inférieure ou égale à une certaine valeur, ce qui pourrait se traduire par f(x) > 18 quand x < 7, ou 3x + 18 < 27 lorsque x ε [0, 3[, par exemple, la traduction pouvant se lire avec les mots du contexte.

Dans le programme, on demande d'enseigner la fonction rationnelle de la forme f(x) = k/x. Nous aimerions savoir s'il s'agit uniquement de la fonction de variation inverse ou également des fonctions rationnelles.

Les situations de variation inverse ont fait l'objet d'apprentissage au 1er cycle du secondaire. Le concept de fonction rationnelle est un objet d'apprentissage de la 3e secondaire. Par exemple, il est possible de l'introduire en activant les connaissances acquises par l'élève (situations de variation inverse) l'année précédente et de faire un lien avec la signification des deux types d'écritures, soit f(x) = k/x ou y = k/x, et yx = k à l'aide d'un contexte pertinent permettant le développement de l'une ou l'autre des compétences. Ce contexte pourrait également permettre de découvrir qu'une situation inversement proportionnelle (variation inverse), soit xy = k, peut se traduire à l'aide de deux autres types d'écritures réciproques (y = k/x et x = k/y). De plus, ces situations permettraient de faire appel au sens de la fraction pour réfléchir sur les intervalles de domaine et de codomaine des situations se représentant par de telles fonctions. Par exemple, quelles valeurs les variables (et la constante) peuvent-elles prendre? Le nombre zéro est-il possible au dénominateur?

Donc, la fonction rationnelle est au programme de 3e secondaire pour favoriser la continuité des apprentissages du 1er cycle.

Si, en 4e secondaire, des situations nécessitent de faire appel au concept de fonction rationnelle, elles devront se limiter à réactiver les connaissances de 3e secondaire. En effet, c'est seulement en 5e secondaire, selon les séquences que ce concept sera approfondi avec l'étude des paramètres de la forme canonique de l'équation dans les séquences *Technico-sciences* et *Sciences-naturelles*. Il sera, de plus, abordée comme quotient de fonction polynomiale (forme homographique) dans la séquence *Technico-sciences*.

À la page 55, dans la partie ayant trait au processus, il est écrit : « Résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une variable - Validation et interprétation de la solution ».
Que veulent dire exactement les termes *validation* et *interprétation*? Nous aimerions avoir des exemples.

Validation : s'assurer que la solution trouvée (résultats) est exacte et plausible dans le contexte.

Interpréter : analyser le résultat et comprendre ce qu'il signifie dans le contexte.

Il ne faut pas perdre de vue que, lorsque l'élève est appelé à manipuler des expressions numériques et algébriques, par exemple lorsqu'il doit résoudre des équations et des inéquations, il est placé dans une perspective de développement de compétences, donc en contexte. Il doit s'assurer que les expressions ou valeurs qu'il détermine sont exactes et plausibles dans le contexte et les analyser de manière à interpréter ce qu'elles représentent (leur signification). Il doit ainsi valider et interpréter sa solution selon la situation.

Par exemple, 3x - 7 < x + 21, menant à x < 14, signifie que les valeurs de la variable dépendante (heures, kilomètres, âge, etc.) pouvant respecter la condition d'un contexte ainsi illustré doivent être inférieures à 14. Il s'agit également pour l'élève de déterminer si ces valeurs sont des nombres naturels, des nombres entiers ou des nombres réels selon le contexte, de s'assurer que sa solution a du sens (vérifier si l'ordre de grandeur du résultat se rapproche d'un résultat auquel on pouvait s'attendre). Il doit l'interpréter afin de s'assurer qu'elle est appropriée. Par exemple, à la 8e année, le modèle A (f(x) = 3x - 7; f(x) = 17) produit un résultat inférieur au modèle B (g(x) = x + 21; g(x) = 29), à la 15e année le modèle A produit un résultat supérieur au modèle B. Cependant, 8 fait partie de l'ensemble-solution, mais non 15. Finalement, il doit exprimer sa solution au regard du contexte.

À la 1re année du 2e cycle, comment trouver une pertinence dans la manipulation des expressions algébriques du deuxième degré et des degrés supérieurs?

La manipulation d'expressions algébriques contribue au développement du sens du nombre et des opérations. Ayant ressenti, à plus d'une occasion, le besoin de faire appel à ces concepts et processus algébriques dans le développement de ses compétences, l'élève peut accepter plus facilement de pousser plus loin l'apprentissage en question en réalisant des activités visant l'intégration de la manipulation d'expressions algébriques.

Peut-on faire multiplier ensemble deux polynômes de degré 2?

Oui, c’est possible. Dans le tableau portant sur les concepts et processus qu’on trouve à la page 55, sous « Développement et factorisation » : « Multiplication d’expressions algébriques de degré 0, 1 ou 2 ».

L’élève doit-il être en mesure de faire une mise en évidence simple d’un polynôme de degré supérieur à 2?

Oui. On peut lire également dans ce tableau sous « Développement et factorisation » : « Division d’expressions algébriques par un monôme – Mise en évidence simple ».

Les expressions considérées doivent-elles intégrer des fractions ?

Oui, le concept de nombre réel (rationnel ou irrationnel) figure dans le tableau portant sur les concepts et processus qui se trouve à la page 55. Dans la 4e note, il est dit : « Les coefficients et les termes constants des expressions algébriques s’écrivent en notation décimale ou fractionnaire. Par exemple, il n’est pas indiqué de transformer en notation décimale les nombres ayant un développement décimal périodique, ni les nombres avec lesquels il est plus facile de travailler en notation fractionnaire. De même, le radical est conservé s’il n’est pas pertinent de le transformer. »

De plus, l’apprentissage ne saurait se limiter aux nouveaux concepts et processus introduits à chaque année du cycle. L’exploitation des acquis antérieurs s’avère incontournable. Ainsi, la notation fractionnaire, le raisonnement proportionnel ou d’autres concepts ne peuvent aucunement être la chasse gardée du 1er cycle du secondaire. L’étude de la notation décimale et de la notation fractionnaire de même que le d’un choix d’écriture selon la situation, introduits au 1er cycle, doivent se poursuivre au 2e cycle.

GÉOMÉTRIE

À la page 61, parmi les processus du champ « Sens spatial et figures géométriques », il est écrit, sous « Recherche de mesures manquantes », « Segments provenant d'une isométrie, d'une similitude, d'une figure plane ou d'un solide ».

Quelle est la principale distinction entre ce processus et ce qui a été fait au 1er cycle : « Il s'appuie sur des définitions et des propriétés pour déterminer des mesures manquantes. »?

Pourriez-vous nous donner un exemple de situation? On ne trouve aucune précision dans les éléments de méthode ni aucun exemple dans les pistes d'exploration pour la recherche de mesures manquantes dans les figures planes.

La "recherche de mesures manquantes de segments provenant d'une isométrie, d'une similitude, d'une figure plane ou d'un solide", en 3e secondaire, s'inscrit dans la continuité de « Il s'appuie sur des définitions et des propriétés pour déterminer des mesures manquantes ».

En 3e secondaire, l'élève réactive ses connaissances relatives aux figures isométriques et semblables pour déduire des mesures. Voici un exemple inspiré d'une phrase tirée de la section qui porte sur les éléments de méthode : « L'élève met en oeuvre ses aptitudes pour interpréter des plans ou des devis et pour reconnaître des perspectives utilisées (...). »

Dans le développement de ses compétences, l'élève pourrait avoir besoin de trouver les dimensions réelles d'un objet (à deux ou à trois dimensions) à partir d'un plan où une figure semblable est censée le représenter ou encore à partir des devis de construction d'une structure architecturale qui s'appuie sur des éléments d'autres structures pour faire des correspondances.

Dans les pistes d'exploration de l'annexe E, il est suggéré de construire des activités où l'élève peut être amené à déduire des mesures (par exemple, à partir d'une conjecture) pour des solides semblables en exploitant le rapport de similitude et le rapport entre les volumes (piste 1) de même que le rapport entre les aires des faces homologues (piste 2). Il peut également être amené à déduire la mesure d'un segment qu'il associe à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui lui est isométrique ou semblable (piste 3 ou 4). Cela dépend du plan, du devis et de la tâche inhérente à la compétence ciblée.

Comment devons-nous établir la continuité par rapport aux transformations géométriques qui ont été vues au 1er cycle? Nous n'avons rien trouvé dans le programme de la 1re année du 2e cycle concernant les propriétés ou encore la reconnaissance des transformations à partir des propriétés. Qu'en est-il de la composition de transformations ou de la réciproque de transformation?

Pouvez-vous préciser la place que doivent prendre les transformations géométriques au long du cycle?

Les transformations géométriques sont mobilisées au 2e cycle lorsque cela s'avère pertinent, soit pour illustrer, comprendre ou gérer une situation. Elles ne font pas l'objet d'un apprentissage en soi mais peuvent être évoquées dans à nombreuses occasions.

Ainsi, elles peuvent être mobilisées afin de produire un dessin impliquant des figures géométriques, de construire le graphique de la réciproque d'une fonction, de rechercher une distance minimale, de prouver un énoncé ou de représenter graphiquement la modification de valeur d'un paramètre d'une fonction. Elles peuvent intervenir dans l'étude du vecteur, la recherche d'une règle, la reconnaissance de figures isométriques ou semblables, la découverte de rapports trigonométriques, la description d'un lieu géométrique ou la construction de l'image d'une figure à partir d'une matrice de transformation, etc.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

À la page 57, en ce qui concerne la 1re année du cycle, on peut lire, sous « Processus », au point « Dénombrement et calcul de probabilités dans des situations variées, y compris des contextes de mesure » : « Représentation d'événements à l'aide de tableaux, d'arbres, (...) ».
Puisque l'élève a vu les arbres de dénombrement au 1er cycle, devons-nous, au cours de la 1re année du 2e cycle, ajouter les arbres de probabilités?

Oui. Pour obtenir de plus amples explications sur la nature des probabilités étudiées dans cette année du cycle, vous pouvez consulter les éléments de méthode et les pistes d'exploration permettant de traiter certaines fausses conceptions à l'annexe E.

Des enseignants de mathématique se demandent si les combinatoires sont enseignées en 3e secondaire. Il n'est pas dit explicitement dans le programme que les formules doivent être appliquées par les élèves. Doit-on les traiter dans le contexte de l'enseignement des probabilités?

Oui. En 3e secondaire, on traite d'arrangement, de permutation et de combinaison (page 58, sous « éléments de méthode »). Il est cependant spécifié, dans la note en bas de page, que l'introduction de ce vocabulaire est facultative.

En 4e secondaire, l'introduction de la notation factorielle est facultative en en ce qui concerne la séquence *Culture, société et technique*, mais introduite officiellement dans la séquence *Technico-sciences*. (Les probabilités sont absentes dans la séquence *Sciences naturelles*).

Quant aux formules (les combinaisons ou la probabilité conditionnelle, par exemple), il n'a jamais été question de les introduire dans le nouveau programme pas plus qu'elles n'étaient présentes dans les programmes Mathématique 068. Dans l'apprentissage, il est possible d'amener les élèves à les déduire, mais ce n'est pas dans le but de les rendre formelles et de les utiliser. Les situations d'apprentissage présentées doivent pouvoir « se raisonner » et « s'illustrer » à l'aide de grilles, d'arbres, de figures géométriques ou de diagrammes pour qu'on soit en mesure d'agir en contexte.

Si on lance 3 fois une pièce de monnaie, la probabilité qu'on obtienne le côté face au moins 2 fois est inférieure, égale ou supérieure à la probabilité qu'on l'obtienne au moins 200 fois si on lance la pièce 300 fois? Comment peut-on conjecturer sur cette question sans recourir aux formules?

Examinons d'abord les conjectures qui peuvent être émises au départ :

1. La fausse conception la plus répandue à ce sujet amènera l'élève à présumer que ces probabilités sont égales puisque le rapport 2 : 3 est le même que 200 : 300 (des proportions équivalentes conduisent à des probabilités équivalentes).

2. Une autre conception conduira l'élève au même constat mais en associant l'événement directement à la probabilité : obtenir 2 fois le côté face avec 3 lancers a une probabilité de 2/3, obtenir 200 fois le côté face avec 300 lancers a une probabilité de 200/300, et comme 2/3 = 200/300, les probabilités sont égales.

3. Une autre fausse conception amènera l'élève à présumer que la probabilité qu'il obtienne au moins 200 fois le côté face parmi 300 lancers est 100 fois plus grande (ou plus petite) que celle d' obtenir 2 fois le côté face avec 3 lancers car 100 est le terme multiplicatif qui unit les deux rapports.

4. Un autre élève pourrait formuler la conjecture ainsi : la probabilité qu'on obtienne 2 fois le côté face avec 3 lancers est inférieure, car les nombres impliqués dans cet événement sont plus petits que dans l'autre, etc.

Pour analyser la situation, on peut recourir à une stratégie d'exemplification à l'aide de cas simples, au raisonnement analogique et à l'extrapolation.

Examinons quelques cas simples.

Événement 1 : *Probabilité qu'on obtienne 1 fois le côté face avec 3 lancers (rapport 1:3).*

Cas favorables : FPP, PFP, PPF.

Nombre de résultats possibles pour 3 lancers: 2 x 2 x 2 = 8 (énumérer l'ensemble des cas possibles au besoin).

Probabilité de 3/8 (3 cas favorables sur 8 cas possibles) (réfutation de la conjecture 2 : la probabilité n'est pas de 2/3, il n'y a pas d'association directe entre l'événement à obtenir et la probabilité qu'il se produise).

Événement 2 : *Probabilité qu'on obtienne 2 fois face avec 6 lancers (le rapport 1: 3 est équivalent à 2 : 6, les termes du rapport étant multipliés par 2).*

Nombres de cas favorables:
Si l'on place le côté face à la première position et qu'on fait varier la position possible pour le deuxième côté face de l'événement, les cas favorables sont au nombre de 5 :
FFPPPP, FPFPPP, PPFPP, FPPPFP, FPPPPF.

Si l'on place maintenant le côté face en deuxième position et qu'on fait varier la position possible pour le deuxième côté face de l'événement, on obtient 4 cas favorable, et ainsi de suite...

On obtient 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 résultats favorables sur 64 résultats possibles (3/8 est différent de 15/64) (réfutation de la conjecture 1 : les probabilités obtenues ne correspondent pas aux rapports établis dans les événements).

La probabilité qu'on obtienne 2 fois le côté face en 6 lancers (15/64) est plus petite que celle qu'on obtienne 1 fois le côté face en 3 lancers (3/8) (réfutation de la conjecture 4 : des nombres plus petits dans l'événement ne conduisent pas nécessairement à une probabilité plus petite).

Cependant, cette probabilité n'est pas non plus 2 fois plus petite, même si les termes des rapports ont été multipliés par 2 (réfutation de la conjecture 3 : le facteur multiplicatif qui unit les nombres dans les rapports équivalents d'événements n'a pas l'influence présumée).

Événement 3 : *Probabilité qu'on obtienne 3 fois le côté face en 9 lancers, avec une méthode de dénombrement similaire à la précédente.*

Nombre de cas favorables :
(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (5 +...) + (4 +...) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 84

Nombre de cas possibles : 512.

On aurait pu faire les mêmes constats en utilisant les rapports 1 : 2, 2 : 4 (cette démarche est encore plus simple, mais on ne travaille pas la procédure additive suggérée permettant de calculer le nombre de cas favorables).

Conclusion (conjecture de la fin)

P (événement 1) > P (événement 2) > P (événement 3) :
3/8 > 15/64 > 84/512.
Plus on augmente les termes du rapport, plus la probabilité diminue.

La probabilité qu'on obtienne au moins 2 fois le côté face avec 3 lancers est plus grande que la probabilité qu'on obtienne au moins 200 fois le côté face avec 300 lancers, car plus on augmente la valeur des termes impliqués dans les rapports équivalents d'événements, plus la probabilité diminue.